

## Eine neue Interpretation der Legendre-Transformation und Folgerungen

Hans-Juergen Hoffmann  
Institut für Materialwissenschaften und –technologien : Glaswerkstoffe  
Technische Universität Berlin  
Hardenbergstraße 40  
10623 Berlin  
Deutschland

**Tel:** 030/314-22352      **Email:** hoffmann.glas@tu-berlin.de

**Schlüsselworte:** Legendre-Transformation, thermodynamische Potenzialfunktionen, Massieu-Gibbs-Funktionen, dritter Hauptsatz der Thermodynamik, Zwei-Zustände-Systeme

### Zusammenfassung

Die Legendre Transformation wird in der Thermodynamik, der Hamilton-Lagrange-Mechanik und in der Optik häufig angewendet. Dabei werden den Werten der Koordinaten  $(x, y(x))$ , die die Punkte einer monotonen stückweise glatten Kurve  $y(x)$  darstellen, die Steigungen

$m_x(x) = \frac{dy(x)}{dx}$  und die Abschnitte der Tangenten  $\bar{y}(m_x)$  auf der  $y$ -Achse zugeordnet.

Somit wird die ursprüngliche Kurve durch die geordnete Menge der Steigungen

$m_x(x) = \frac{dy(x)}{dx}$  zusammen mit den Abschnitten all ihrer Tangenten  $\bar{y}(m_x)$  auf der  $y$ -Achse

dargestellt. Es wird gezeigt, dass die transformierte oder konjugierte Kurve grundsätzlich durch eine homogene lineare Funktion der jeweiligen Variablen ergänzt werden muss, was in der Literatur gewöhnlich vernachlässigt wird.

Zusätzlich wird eine neue Interpretation der Legendre-Transformation vorgestellt und diskutiert. Hierzu wird die Ableitung  $m_x(x)$  als die eigentliche Ausgangsfunktion betrachtet und zwischen den Werten  $x_0$  und  $x$  integriert. Dieses Integral wird durch das Integral von  $x(m_x)$  (die inverse Funktion von  $m_x(x)$ ) über  $m_x$  zwischen  $m_{x0} = m(x_0)$  und  $m_x = m_x(x)$  ergänzt, wobei vorausgesetzt ist, dass  $m_x(x)$  und  $x(m_x)$  streng monoton sind. Die Summe beider Integrale ergibt die „Fläche“  $(xm_x - x_0m_{x0})$ . Die Legendre-Transformierte erhält man durch Umordnung der Terme. Die Prozedur der Transformation entspricht einer partiellen Integration.

Es werden einige Beispiele und Folgerungen aus den betrachteten Eigenschaften an Hand eines einfachen Zwei-Zustände-Modells gezeigt und diskutiert. Die generellen Ergebnisse dieser Arbeit beseitigen mögliche innere Widersprüche in der Thermodynamik.